



*Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»*

Факультет «Информатика и вычислительная техника»

Кафедра «Прикладная математика»

*Методические указания
и варианты заданий для выполнения
контрольной работы
по дисциплине «Высшая математика»
для студентов заочной формы обучения
(нормативный и сокращенный срок обучения)*

Ростов-на-Дону

2024

Составитель: Азимова Н.Н.

Контрольная работа предназначена для студентов заочной формы (нормативный и сокращенный срок обучения). Содержит программу курса математики по темам: «Линейная алгебра», «Векторная алгебра и аналитическая геометрия», «Неопределенный интеграл», «Определенный интеграл», «Теория вероятностей» . Указана рекомендуемая литература, варианты контрольной работы (первый семестр), а также даны образцы решения задач. Номер варианта студента — двухзначное число, определяемое двумя последними цифрами номера зачётной книжки следующим образом: первая цифра номера варианта (число десятков) определяется по предпоследней цифре номера зачетной книжки. Если она нуль или чётная (2, 4, 6, 8), то число десятков номера варианта равно 0; если предпоследняя цифра номера зачётной книжки нечетная (1, 3, 5, 7, 9), то число десятков номера варианта равно единице. Число единиц номера варианта равно последней цифре номера зачётной книжки.

Например: зачётной книжке 3037206 соответствует вариант 6;

зачётной книжке 3037231 соответствует вариант 11.

Вариант 20 выполняет студент, у которого последние две цифры зачётной книжки 00, 20, 40, 60, 80, например, 3037200.

**Экзаменационные вопросы по математике
для студентов 1-го курса заочного факультета.**

Элементы линейной алгебры.

Матрицы, виды матриц и действия с матрицами. Числовые характеристики матриц. Определители второго и третьего порядков: определения, свойства и способы вычисления. Элементарные преобразования матриц. Обратная матрица: определение, критерий существования и способы вычисления обратной матрицы. Базисный минор и ранг матрицы. Системы линейны алгебраических уравнений, их виды. Теорема Кронекера-Капелли. Решение определенных систем третьего порядка методом Крамера, матричным методом и методом Гаусса. Общее решение однородных и неоднородных неопределенных систем. Понятие линейного пространства. Линейный оператор, матрица линейного оператора

Векторная алгебра и аналитическая геометрия.

Понятие геометрического вектора. Проекция вектора на ось. Линейные операции над векторами. Линейная независимость векторов, базис на плоскости и в пространстве. Координаты вектора, их геометрический смысл. Действия с векторами в координатах. Условие коллинеарности векторов. Скалярное произведение двух векторов: определение, свойства, вычисление в координатах и приложения. Векторное произведение двух векторов: определение, свойства, вычисление в координатах и приложения. Смешанное произведение трех векторов, теорема о геометрическом смысле, вычисление в координатах и свойства. Условие компланарности трех векторов.

Прямая на плоскости. Угловой коэффициент прямой. Различные виды уравнений прямой (каноническое уравнение, общее, «в отрезках», нормальное). Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой.

Плоскость: нормальный вектор, общее уравнение плоскости. Различные виды уравнений плоскости («в отрезках», нормальное уравнение). Угол между плоскостями, расстояние от точки до плоскости.

Прямая в пространстве: канонические, параметрические уравнения. Прямая как пересечение двух плоскостей. Угол между прямыми и угол между прямой и плоскостью.

Системы координат на плоскости: прямоугольная и полярная. Системы координат в пространстве: прямоугольная, цилиндрическая и сферическая. Кривые второго порядка: определения и канонические уравнения эллипса, окружности, гиперболы и параболы. Поверхности второго порядка: Эллипсоиды, сфера, однополостный и двуполостный гиперболоиды, эллиптический и гиперболический параболоиды. Конус второго порядка. Цилиндры второго порядка.

Введение в анализ.

Функция одной переменной. Предел последовательности и функции. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Сравнение бесконечно малых. Теоремы о первом и втором специальных пределах. Число e , экспонента, натуральный логарифм. Непрерывность функции. Точки разрыва, их классификация. Свойства непрерывных на отрезке функций.

Дифференциальное исчисление.

Задачи, приводящие к понятию производной (о касательной к кривой и о скорости). Определение производной, ее геометрический и механический смысл. Правила дифференцирования. Таблица производных основных элементарных функций. Повторное дифференцирование. Вычисление производных функций, заданных неявно и параметрически. Дифференциал функции: определение, свойства, геометрический смысл, инвариантность. Применение дифференциалов в приближенных вычислениях. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей. Приложение дифференциального исчисления к исследованию функций: монотонность, экстремумы, направление выпуклости кривых и точки перегиба. Асимптоты. Общая схема исследования функции.

Неопределенный интеграл.

Первообразная функции, неопределенный интеграл и его свойства. Таблица интегралов. Основные приемы интегрирования: непосредственное интегрирование, метод подстановки, интегрирование по частям. Интегралы группы «четырех». Интегрирование дробно-рациональных функций. Интегралы от тригонометрических функций. Интегрирование некоторых иррациональностей.

Определенный интеграл.

Задача о площади криволинейной трапеции. Понятие определенного интеграла, его геометрический и механический смысл. Свойства определенного интеграла, выражаемые равенствами. Свойства определенного интеграла, выражаемые неравенствами. Теорема о среднем. Связь определенного и неопределенного интегралов, формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Формула интегрирования по частям.

Приложения определенного интеграла.

Вычисление площадей плоских фигур. Вычисление длины дуги плоской кривой определенного интеграла, выражаемые равенствами и неравенствами. Связь определенного и неопределенного интегралов. Замена переменной в определенном интеграле. Основная формула интегрального исчисления - формула Ньютона-Лейбница. Приложения определенного интеграла: вычисление площадей плоских фигур.

Теория вероятностей

Классическое определение вероятности события. Статистическое определение вероятности события. Геометрическое определение вероятности события.

Задачи классической вероятности. Элементы комбинаторики.

Теорема умножения. Определение условной вероятности. Независимость событий.

Формулы умножения вероятностей. Теоремы сложения вероятностей. Формула полной вероятности, формулы Байеса.

Математическая статистика.

Выборка и способы ее представления. Числовые характеристики выборочного распределения.

Точечные оценки и их свойства. Статистическое оценивание характеристик распределения генеральной совокупности по выборке.

Интервальные оценки. Доверительный интервал, надежность и точность оценки. Доверительный интервал для центра нормального распределения при известной дисперсии. Доверительный интервал для среднего квадратичного отклонения нормального распределения.

Проверка статистических гипотез. Критерий согласия Пирсона.

Линейная регрессия. Элементы регрессионного анализа и метод наименьших квадратов. Характер связи и его оценивание по коэффициенту корреляции.

Литература:

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. -М.: Наука, 1984.
2. Данко П.В., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 1986.
3. Волокитин Г.И., Ларченко В.В., Азаров Д.А., Редько Ю.С. Начала линейной алгебры. Учебное пособие. – Ростов-на-Дону: Издательский центр ДГТУ, 2012.
4. Я.С. Бугров, С.М. Никольский. Элементы линейной алгебры и аналитическая геометрия. Москва «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1980.
5. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. Аналитическая геометрия. Издание четвертое, дополненное. Москва «Наука» Главная редакция физико-математической литературы, 1973.
6. А.Ф. Бермант, А.Г. Араманович. Краткий курс математического анализа для втузов, ч.1. – М.: Наука, 1978.
7. С.В. Фролов, Р.Я. Шостак Курс высшей математики для втузов. – М.: Высшая школа, 1973.

Варианты заданий контрольной работы

Алгебра и геометрия. Производные и пределы

Задание 1. Дана матрица $C = \begin{pmatrix} a & 2b \\ -d & 3c \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $R = C^2 + 2C^T$.

Задание 2. Дана система уравнений $A \cdot X = B$, где матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2a & -3b & c \\ 3a & -6b & 5c \\ 5a & -4b & 2c \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2abc \\ 3abc \end{pmatrix}.$$

Решить систему по формулам Крамера;

Значения параметров a, b, c, d к заданиям 1, 2 даны в таблице.

Номер варианта	a	b	c	d	Номер варианта	a	b	c	d
1	-1	1	5	-4	11	1	2	-2	4
2	2	1	4	-1	12	1	3	-2	-2
3	1	-3	1	-4	13	3	-3	1	2
4	2	1	6	1	14	-2	3	-1	1
5	1	-2	-1	6	15	1	1	5	-2
6	1	2	-2	4	16	-1	1	5	-4
7	1	3	-2	-2	17	2	1	4	-1
8	3	-3	1	2	18	1	-3	1	-4
9	-2	3	-1	1	19	2	1	6	1
10	1	1	5	-2	20	1	-2	-1	6

Задание 3. Даны координаты вершин треугольной пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ (см. табл.). Требуется найти:

- а) длину ребра A_1A_2 ;
- б) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_3 ;
- в) площадь грани $A_1A_2A_3$;
- г) объём пирамиды;

Номер варианта	A_1	A_2	A_3	A_4
1	(-3, -1,5)	(-4,0,1)	(-2,1,3)	(-2,-1,1)
2	(0 ,2 , 5)	(-1,3,1)	(1,4,3)	(1,2,1)
3	(-2,1,2)	(-3,2,-2)	(-1, 3,0)	(-1, 1,-2)
4	(0,-2,5)	(-1,-1,1)	(1,0,3)	(1, -2,1)
5	(0,-1,6)	(-1,0,2)	(1,1,4)	(1,-1,2)
6	(-2,-2,5)	(-3,-1,1)	(-1,0,3)	(-1, -2,1)
7	(1, -1,5)	(-1,-1,-1)	(2,1,3)	(2,-1,1)
8	(-2, 2,5)	(-3, 3,1)	(-1,4,3)	(-1,2,1)
9	(-3, 1,3)	(-4,2,-1)	(-2,3,1)	(-2,1,-1)
10	(0,1,6)	(-1,2,2)	(1,3,4)	(1, 1,2)
11	(-3, -1,5)	(-4,0,1)	(-2,1,3)	(-2,-1,1)
12	(0 ,2 , 5)	(-1,3,1)	(1,4,3)	(1,2,1)
13	(-2,1,2)	(-3,2,-2)	(-1, 3,0)	(-1, 1,-2)
14	(0,-2,5)	(-1,-1,1)	(1,0,3)	(1, -2,1)
15	(0,-1,6)	(-1,0,2)	(1,1,4)	(1,-1,2)
16	(-2,-2,5)	(-3,-1,1)	(-1,0,3)	(-1, -2,1)
17	(1, -1,5)	(-1,-1,-1)	(2,1,3)	(2,-1,1)
18	(-2, 2,5)	(-3, 3,1)	(-1,4,3)	(-1,2,1)
19	(-3, 1,3)	(-4,2,-1)	(-2,3,1)	(-2,1,-1)
20	(0,1,6)	(-1,2,2)	(1,3,4)	(1, 1,2)

Задание 4. Найти производные 1-го порядка данных функций.

1	$a) y = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x^3} + \sqrt[3]{x} - 2;$	$\bar{b}) S = (4 - 2 \sin t)e^t;$	$\wp) u = \cos^5(4V - 1);$
2	$a) y = \frac{4}{\sqrt{x}} + 9x^2 - \frac{7}{x};$	$\bar{b}) s = \frac{2 - \ln t}{1 + 2 \arcsin t};$	$\wp) u = tg^3(6V + 1);$
3	$a) y = x^3 - \frac{3}{x^4} + \sqrt[4]{x^9};$	$\bar{b}) s = (4 - \cos t) \ln t;$	$\wp) u = \operatorname{arctg}^2 \frac{V}{2};$
4	$a) y = 5x^9 + \frac{2}{x^3} + \sqrt[8]{x};$	$\bar{b}) s = \frac{e^t - 5t}{t^3};$	$\wp) u = \operatorname{ctg}^4 \frac{V}{4};$
5	$a) y = 2x^3 - \frac{5}{x^7} - \sqrt[4]{x^5};$	$\bar{b}) s = t^3(4 + 2 \operatorname{arctg} t);$	$\wp) u = \ln^3 \frac{V}{2};$
6	$a) y = 5x^2 + \frac{3}{x^4} - \sqrt[6]{x^7};$	$\bar{b}) s = (3 + \operatorname{tg} t)(1 - 5 \operatorname{ctg} t);$	$\wp) u = \sqrt[3]{1 - 4V^2};$
7	$a) y = x^5 - \frac{2}{x^3} + 2\sqrt[7]{x^5};$	$\bar{b}) s = (4 - 3 \ln t)(5 + 2 \sin t);$	$\wp) u = \arcsin^3 2V;$
8	$a) y = 7x^2 + \frac{4}{x^6} - \sqrt[5]{x^2};$	$\bar{b}) s = (1 + t^2)(2 - 3 \operatorname{arcc} \operatorname{tg} t);$	$\wp) u = \sin^4(2V + 3);$

9	$a) y = 5x - \frac{2}{x^4} + 3\sqrt[5]{x^6};$	$b) s = (t^2 - 3)(4t + 2 \ln t);$	$c) u = \cos^3(3V + 1);$
10	$a) y = x^4 + \frac{1}{x} - 2\sqrt[3]{x};$	$b) s = (3t^3 - 4)(t - 2 \cos t);$	$c) u = \ln^2(5V - 3);$
11	$a) y = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x^3} + \sqrt[3]{x} - 2;$	$b) S = (4 - 2 \sin t)e^t;$	$c) u = \cos^5(4V - 1);$
12	$a) y = \frac{4}{\sqrt{x}} + 9x^2 - \frac{7}{x};$	$b) s = \frac{2 - \ln t}{1 + 2 \arcsin t};$	$c) u = \operatorname{tg}^3(6V + 1);$
13	$a) y = x^3 - \frac{3}{x^4} + \sqrt[4]{x^9};$	$b) s = (4 - \cos t) \ln t;$	$c) u = \operatorname{arctg}^2 \frac{V}{2};$
14	$a) y = 5x^9 + \frac{2}{x^3} + \sqrt[8]{x};$	$b) s = \frac{e^t - 5t}{t^3};$	$c) u = \operatorname{ctg}^4 \frac{V}{4};$
15	$a) y = 2x^3 - \frac{5}{x^7} - \sqrt[4]{x^5};$	$b) s = t^3(4 + 2 \operatorname{arctg} t);$	$c) u = \ln^3 \frac{V}{2};$
16	$a) y = 5x^2 + \frac{3}{x^4} - \sqrt[6]{x^7};$	$b) s = (3 + \operatorname{tg} t)(1 - 5 \operatorname{ctg} t);$	$c) u = \sqrt[3]{1 - 4V^2};$
17	$a) y = x^5 - \frac{2}{x^3} + 2\sqrt[7]{x^5};$	$b) s = (4 - 3 \ln t)(5 + 2 \sin t);$	$c) u = \arcsin^3 2V;$
18	$a) y = 7x^2 + \frac{4}{x^6} - \sqrt[5]{x^2};$	$b) s = (1 + t^2)(2 - 3 \operatorname{arctg} t);$	$c) u = \sin^4(2V + 3);$
19	$a) y = 5x - \frac{2}{x^4} + 3\sqrt[5]{x^6};$	$b) s = (t^2 - 3)(4t + 2 \ln t);$	$c) u = \cos^3(3V + 1);$
20	$a) y = x^4 + \frac{1}{x} - 2\sqrt[3]{x};$	$b) s = (3t^3 - 4)(t - 2 \cos t);$	$c) u = \ln^2(5V - 3);$

Задание 5. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0 .

Номер варианта а	Вид функции $f(x)$	Номер варианта	Вид функции $f(x)$
1	$3(\sqrt[3]{x} - \sqrt{4x}), x_0 = 1.$	6	$\frac{3}{\sqrt{5-x^2}}, x_0 = 2.$
2	$2\sqrt[3]{x} + x - 3, x_0 = 8.$	7	$6\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x}, x_0 = 1.$
3	$2x + \frac{1}{x}, x_0 = 1.$	8	$\frac{x^2 - 2x - 3}{4}, x_0 = 3.$
4	$\frac{x^2 - 3}{x}, x_0 = -1.$	9	$14\sqrt{x} - 15\sqrt[3]{x}, x_0 = 1.$
5	$\sqrt{5-x^2}, x_0 = 1.$	10	$\frac{x}{x^2 + 1}, x_0 = -2.$
1	$\frac{3}{\sqrt{5-x^2}}, x_0 = 2.$	6	$3(\sqrt[3]{x} - \sqrt{4x}), x_0 = 1.$
2	$6\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x}, x_0 = 1.$	7	$2\sqrt[3]{x} + x - 3, x_0 = 8.$

3	$\frac{x^2 - 2x - 3}{4}, x_0 = 3.$	8	$2x + \frac{1}{x}, x_0 = 1.$
4	$14\sqrt{x} - 15\sqrt[3]{x}, x_0 = 1.$	9	$\frac{x^2 - 3}{x}, x_0 = -1.$
5	$\frac{x}{x^2 + 1}, x_0 = -2.$	10	$\sqrt{5 - x^2}, x_0 = 1.$

Задание 6. Найти дифференциалы функций

Номер варианта	$y=f(x)$	$u=u(x)$	$s=s(t)$
1	a) $y = \sin 2x - 5;$	б) $u = 3e^{-x^2};$	в) $s = \arcsin 4t - t^2.$
2	a) $y = \ln(1 - 5x);$	б) $u = 4 - x^3;$	в) $s = 3^{-t} + 5.$
3	a) $y = 2\operatorname{tg} x / 3;$	б) $u = 1 - \cos x;$	в) $s = \ln(2t - 1).$
4	a) $y = \cos^2 x;$	б) $u = 3^{-x};$	в) $s = \operatorname{arctg} t / 2.$
5	a) $y = 4 - 3 \sin x;$	б) $u = \ln 2x - x^3;$	в) $s = 4t^2 - 1.$
6	a) $y = 10 - 3x^2;$	б) $u = 5 + \sin x;$	в) $s = e^{-3t}.$
7	a) $y = \arccos 2x;$	б) $u = 1 - 3 \ln x;$	в) $s = \cos t / 2.$
8	a) $y = x - 2 \sin x;$	б) $u = \operatorname{ctg} x / 2;$	в) $s = \ln(1 - 2t).$
9	a) $y = 3 - \operatorname{tg} x;$	б) $u = 7 + 10x^3;$	в) $s = e^{-3t^2}.$
10	a) $y = 5 \ln x / 3;$	б) $u = \operatorname{arctg} 4x;$	в) $s = 5 + 2 \cos t.$
11	a) $y = \sin 2x - 5;$	б) $u = 3e^{-x^2};$	в) $s = \arcsin 4t - t^2.$
12	a) $y = \ln(1 - 5x);$	б) $u = 4 - x^3;$	в) $s = 3^{-t} + 5.$
13	a) $y = 2\operatorname{tg} x / 3;$	б) $u = 1 - \cos x;$	в) $s = \ln(2t - 1).$
14	a) $y = \cos^2 x;$	б) $u = 3^{-x};$	в) $s = \operatorname{arctg} t / 2.$
15	a) $y = 4 - 3 \sin x;$	б) $u = \ln 2x - x^3;$	в) $s = 4t^2 - 1.$
16	a) $y = 10 - 3x^2;$	б) $u = 5 + \sin x;$	в) $s = e^{-3t}.$
17	a) $y = \arccos 2x;$	б) $u = 1 - 3 \ln x;$	в) $s = \cos t / 2.$
18	a) $y = x - 2 \sin x;$	б) $u = \operatorname{ctg} x / 2;$	в) $s = \ln(1 - 2t).$
19	a) $y = 3 - \operatorname{tg} x;$	б) $u = 7 + 10x^3;$	в) $s = e^{-3t^2}.$

20	а) $y = 5 \ln x / 3;$	б) $u = \operatorname{arctg} 4x;$	в) $s = 5 + 2 \cos t.$
----	-----------------------	-----------------------------------	------------------------

Задание 7. Найти пределы, используя элементарные способы раскрытия неопределенностей.

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 - 7x + 6}{2 - 7x + 3x^2}; \text{ нпу} \quad a)x_0 = 2, b)x_0 = \infty$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{5x^2 - 6x + 1}{3x^2 - 2x - 1}; \text{ нпу} \quad a)x_0 = 1, b)x_0 = \infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 - 5x - 3}{4x^2 - 13x + 3}; \text{ нпу} \quad a)x_0 = 3, b)x_0 = \infty$$

$$4) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 + 2x - 1}{-4x^2 - x + 3}; \text{ нпу} \quad a)x_0 = -1, b)x_0 = \infty$$

$$5) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 - 3x - 2}{3x^2 - 5x - 2}; \text{ нпу} \quad a)x_0 = 2, b)x_0 = \infty$$

$$6) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 - 10x + 3}{2x^2 + 5x - 3}; \text{ нпу} \quad a)x_0 = 2, b)x_0 = \infty$$

$$7) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{4x^2 - 5x + 1}{2x^2 - x - 1}; \text{ нпу} \quad a)x_0 = 1, b)x_0 = \infty$$

$$8) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{5x^2 - 3x - 2}{3x^2 - 5x + 2}; \text{ нпу} \quad a)x_0 = 1, b)x_0 = \infty$$

$$9) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 - 5x - 2}{4x^2 - 5x - 6}; \text{ нпу} \quad a)x_0 = 2, b)x_0 = \infty$$

$$10) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 + 2x - 8}{2x^2 - x - 10}; \text{ нпу} \quad a)x_0 = -2, b)x_0 = \infty$$

$$11) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 - 7x + 6}{2 - 7x + 3x^2}; \text{ нпу} \quad a)x_0 = 2, b)x_0 = \infty$$

$$12) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{5x^2 - 6x + 1}{3x^2 - 2x - 1}; \text{ нпу} \quad a)x_0 = 1, b)x_0 = \infty$$

$$13) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 - 5x - 3}{4x^2 - 13x + 3}; \text{ нпу} \quad a)x_0 = 3, b)x_0 = \infty$$

$$14) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 + 2x - 1}{-4x^2 - x + 3}; \text{ нпу} \quad a)x_0 = -1, b)x_0 = \infty$$

$$15) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 - 3x - 2}{3x^2 - 5x - 2}; \text{ нпу} \quad a)x_0 = 2, b)x_0 = \infty$$

$$16) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 - 10x + 3}{2x^2 + 5x - 3}; \text{при } a)x_0 = 2, b)x_0 = \infty$$

$$17) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{4x^2 - 5x + 1}{2x^2 - x - 1}; \text{при } a)x_0 = 1, b)x_0 = \infty$$

$$18) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{5x^2 - 3x - 2}{3x^2 - 5x + 2}; \text{при } a)x_0 = 1, b)x_0 = \infty$$

$$19) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 - 5x - 2}{4x^2 - 5x - 6}; \text{при } a)x_0 = 2, b)x_0 = \infty$$

$$20) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 + 2x - 8}{2x^2 - x - 10}; \text{при } a)x_0 = -2, b)x_0 = \infty$$

Задание 8. Пользуясь таблицей основных интегралов и правилами интегрирования, найти интегралы.

Интегралы	
1 $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x^2 + 5}} - 2x^3 - \frac{1}{x} \right) dx$	2 $\int \left(\frac{4}{x^2 - 1} - 5e^x + 3x^2 \right) dx$
3 $\int \left(\frac{2}{\sqrt{3 - x^2}} - \frac{1}{x} - 2x^4 \right) dx$	4 $\int \left(\frac{2}{x^2 + 2} + 2^x - 3x^7 \right) dx$
5 $\int \left(\frac{7}{x^2 + 16} - \frac{1}{x} + 3x^6 \right) dx$	6 $\int \left(\frac{8}{\sqrt{6 - x^2}} - 2 \sin x + x^8 \right) dx$
7 $\int \left(\frac{2}{\cos^2 x} + 3 \cos x - 2x^5 \right) dx$	8 $\int \left(\frac{2}{x^2 - 3} - \frac{4}{x} + 5^x \right) dx$
9 $\int \left(\frac{2}{\sqrt{4 - x^2}} + \frac{3}{x} - 2x^4 \right) dx$	10 $\int \left(\frac{5}{x^2 + 5} + 7^x - 2x^3 \right) dx$
11 $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x^2 + 5}} - 2x^3 - \frac{1}{x} \right) dx$	12 $\int \left(\frac{4}{x^2 - 1} - 5e^x + 3x^2 \right) dx$
13 $\int \left(\frac{2}{\sqrt{3 - x^2}} - \frac{1}{x} - 2x^4 \right) dx$	14 $\int \left(\frac{2}{x^2 + 2} + 2^x - 3x^7 \right) dx$

15 $\int \left(\frac{7}{x^2 + 16} - \frac{1}{x} + 3x^6 \right) dx$	16 $\int \left(\frac{8}{\sqrt{6 - x^2}} - 2 \sin x + x^8 \right) dx$
17 $\int \left(\frac{2}{\cos^2 x} + 3 \cos x - 2x^5 \right) dx$	18 $\int \left(\frac{2}{x^2 - 3} - \frac{4}{x} + 5^x \right) dx$
19 $\int \left(\frac{2}{\sqrt{4 - x^2}} + \frac{3}{x} - 2x^4 \right) dx$	20 $\int \left(\frac{5}{x^2 + 5} + 7^x - 2x^3 \right) dx$

Задание 9. Найти интегралы

№ вар.	Интегралы		
1	$\int \cos 4x dx$	$\int \sin^2 3x dx$	$\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 10}$
2	$\int e^{5x} dx$	$\int \cos^2 7x dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 8x + 9}}$
3	$\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$	$\int \sin^2 6x dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x - 5}}$
4	$\int \sin \frac{x}{2} dx$	$\int \cos^2 10x dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{10 - 2x - x^2}}$
5	$\int 10^{2x+1} dx$	$\int \sin^2 5x dx$	$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$
6	$\int \sin(2 - 3x) dx$	$\int \cos^2 8x dx$	$\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 1}$
7	$\int e^{1-3x} dx$	$\int \sin^2 10x dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{4 - 6x - x^2}}$
8	$\int \cos 2x dx$	$\int \cos^2 6x dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{15 - 2x + x^2}}$
9	$\int \frac{dx}{\sin^2 8x}$	$\int \sin^2 15x dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 10x + 12}}$

10	$\int \frac{dx}{5x+3}$	$\int \cos^2 4x dx$	$\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 2}$
11	$\int \cos 4x dx$	$\int \sin^2 3x dx$	$\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 10}$
12	$\int e^{5x} dx$	$\int \cos^2 7x dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 8x + 9}}$
13	$\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$	$\int \sin^2 6x dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x - 5}}$
14	$\int \sin \frac{x}{2} dx$	$\int \cos^2 10x dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{10 - 2x - x^2}}$
15	$\int 10^{2x+1} dx$	$\int \sin^2 5x dx$	$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$
16	$\int \sin(2 - 3x) dx$	$\int \cos^2 8x dx$	$\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 1}$
17	$\int e^{1-3x} dx$	$\int \sin^2 10x dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{4 - 6x - x^2}}$
18	$\int \cos 2x dx$	$\int \cos^2 6x dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{15 - 2x + x^2}}$
19	$\int \frac{dx}{\sin^2 8x}$	$\int \sin^2 15x dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 10x + 12}}$
20	$\int \frac{dx}{5x+3}$	$\int \cos^2 4x dx$	$\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 2}$

Задание 10. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

№ вар.	Уравнения линий
1	$y = 3x^2 + 1, \quad y = 3x + 7$
2	$y = x^3, \quad y = 8, \quad x = 0$
3	$y = x^2, \quad y = 2 - x^2$

4	$y = x, y = 1/x, x = 3$
5	$y = x^2, y = x + 2$
6	$y = \sqrt{x}, y = x - 2, x = 0$
7	$y = x^2 + 1, y = x, x = 0, x = 2$
8	$y = x^2, y = 3 - 2x$
9	$y = x^2 - 1, y = x + 5$
10	$y = 2 - x^2, y = -x$
11	$y = 3x^2 + 1, y = 3x + 7$
12	$y = x^3, y = 8, x = 0$
13	$y = x^2, y = 2 - x^2$
14	$y = x, y = 1/x, x = 3$
15	$y = x^2, y = x + 2$
16	$y = \sqrt{x}, y = x - 2, x = 0$
17	$y = x^2 + 1, y = x, x = 0, x = 2$
18	$y = x^2, y = 3 - 2x$
19	$y = x^2 - 1, y = x + 5$
20	$y = 2 - x^2, y = -x$

Задание 11. Классическое определение вероятности.

1. Из колоды в 36 карт наудачу извлекают 3 карты. Найти вероятность того, что среди них окажется один туз.

2. Среди 10 электрических лампочек 3 нестандартные. Найти вероятность того, что взятые наугад две лампочки окажутся нестандартными.

3. Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

4. В партии из 12 деталей 2 бракованные. Найти вероятность того, что среди взятых наугад четырех деталей окажутся 2 бракованные.

5. 20 участников шахматного турнира разделили на 2 команды по 10 человек в каждой. Найти вероятность того, что 2 сильнейших игрока окажутся в одной команде.

6. Абонент забыл шестизначный номер телефона и набрал его наугад, помня лишь, что все цифры в нем различны. Какова вероятность набрать нужный номер?

7. В партии из 15 телевизоров 5 имеют скрытые дефекты. Найти вероятность того, что 3 телевизора, выбранные наугад, не имеют скрытых дефектов.

8. Игрок делит наугад колоду в 36 карт пополам и одну половину берет себе. Найти вероятность того, что у него окажутся все 4 туза.

9. На шести карточках написаны цифры от 1 до 6. Найти вероятность того, что среди 3-х случайно выбранных карточек окажется карточка с номером 6.

10. Из 10 лотерейных билетов выигрышными являются 2. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу пяти билетов выигрышными являются два.

11. Из колоды в 36 карт наудачу извлекают 2 карты. Найти вероятность того, что среди них окажется один туз.

12. Среди 10 электрических лампочек 2 нестандартные. Найти вероятность того, что взятые наугад две лампочки окажутся нестандартными.

13. Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

14. В партии из 12 деталей 3 бракованные. Найти вероятность того, что среди взятых наугад четырех деталей окажутся 2 бракованные.

15. 40 участников шахматного турнира разделили на 4 команды по 10 человек в каждой. Найти вероятность того, что 2 сильнейших игрока окажутся в одной команде.

16. Абонент забыл шестизначный номер телефона и набрал его наугад, помня лишь, что все цифры в нем различны. Какова вероятность набрать нужный номер?

17. В партии из 20 телевизоров 5 имеют скрытые дефекты. Найти вероятность того, что 4 телевизора, выбранные наугад, не имеют скрытых дефектов.

18. Игрок делит наугад колоду в 36 карт пополам и одну половину берет себе. Найти вероятность того, что у него окажутся все 4 туза.

19. На шести карточках написаны цифры от 1 до 6. Найти вероятность того, что среди 3-х случайно выбранных карточек окажется карточка с номером 6.

20. Из 20 лотерейных билетов выигрышными являются 2. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу пяти билетов выигрышными являются два.

Задание 12. Теоремы сложения и умножения вероятностей

1. На стройке 3 крана. Вероятность безотказной работы первого крана равна 0,7, второго – 0,8, третьего – 0,9. Найти вероятность того, что работает хотя бы один кран.

2. Два стрелка стреляют по одной мишени. Вероятность поражения мишени первым стрелком равна 0,7, вторым – 0,8. Оба производят по одному выстрелу в мишень. Найти вероятность того, что оба стрелка поразят мишень.

3. Для сигнализации об аварии установлено 3 независимо работающих датчика. Вероятность срабатывания при аварии для первого датчика равна 0,9, для второго - 0,8, для третьего – 0,7. Найти вероятность, что при аварии сработает хотя бы один датчик.

4. В цехе работает два конвейера. Вероятность безотказной работы первого конвейера равна 0,6, а второго – 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент работает один конвейер.

5. Рабочий обслуживает 3 станка. Вероятность того, что станок потребует в течение рабочего дня ремонта, для первого станка равна 0,2, для второго – 0,1, для третьего – 0,3. Найти вероятность того, что в течение рабочего дня ни один из станков не потребует ремонта.

6. Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в нее первым стрелком равна 0,5, вторым – 0,6. Найти вероятность того, что мишень будет поражена хотя бы одним из стрелков.

7. Устройство состоит из двух независимо работающих блоков. Вероятности отказа блоков соответственно равны 0,1 и 0,05. Найти вероятность отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

8. Найти вероятность того, что при одновременном бросании трех игральных костей, ни на одной из них не выпадет "6".

9. В цехе работает два конвейера. Вероятность безотказной работы первого конвейера равна 0,6, а второго – 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент работает хотя бы один конвейер.

10. В магазине установлено 3 кондиционера. Вероятность быть включенным для первого кондиционера равна 0,6, для второго – 0,5, для третьего – 0,7. Найти вероятность того, что включены все три кондиционера.

11. На стройке 3 крана. Вероятность безотказной работы первого крана равна 0,75, второго – 0,85, третьего – 0,95. Найти вероятность того, что работает хотя бы один кран.

12. Два стрелка стреляют по одной мишени. Вероятность поражения мишени первым стрелком равна 0,6, вторым – 0,7. Оба производят по одному выстрелу в мишень. Найти вероятность того, что оба стрелка поразят мишень.

13. Для сигнализации об аварии установлено 3 независимо работающих датчика. Вероятность срабатывания при аварии для первого датчика равна 0,8, для второго – 0,7, для третьего – 0,6. Найти вероятность, что при аварии сработает хотя бы один датчик.

14. В цехе работает два конвейера. Вероятность безотказной работы первого конвейера равна 0,7, а второго – 0,9. Найти вероятность того, что в данный момент работает один конвейер.

15. Рабочий обслуживает 3 станка. Вероятность того, что станок потребует в течение рабочего дня ремонта, для первого станка равна 0,25, для второго – 0,15, для третьего – 0,35. Найти вероятность того, что в течение рабочего дня ни один из станков не потребует ремонта.

16. Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в нее первым стрелком равна 0,6, вторым – 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена хотя бы одним из стрелков.

17. Устройство состоит из двух независимо работающих блоков. Вероятности отказа блоков соответственно равны 0,1 и 0,05. Найти вероятность отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

8. Найти вероятность того, что при одновременном бросании трех игральных костей, ни на одной из них не выпадет "6".

19. В цехе работает два конвейера. Вероятность безотказной работы первого конвейера равна 0,7, а второго – 0,9. Найти вероятность того, что в данный момент работает хотя бы один конвейер.

20. В магазине установлено 3 кондиционера. Вероятность быть включенным для первого кондиционера равна 0,7, для второго – 0,6, для третьего – 0,8. Найти вероятность того, что включены все три кондиционера

Задание 13. Выборка, её числовые характеристики

Для указанных ниже статистических распределений выборок требуется:

1) Найти эмпирическую функцию распределения и построить ее график.

2) Построить полигон частот.

3) Вычислить выборочную среднюю $\overline{X_B}$.

4) Вычислить выборочную и исправленную дисперсии.

1. x_i 1 4 8 10

n_i 5 2 2 1

2. x_i -5 1 3 5

n_i 2 4 3 1

$$\begin{array}{rcl}
 3. & x_i & 1 \quad 5 \quad 9 \quad 11 \\
 & n_i & 2 \quad 2 \quad 5 \quad 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 4. & x_i & -2 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \\
 & n_i & 2 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 5. & x_i & 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\
 & n_i & 5 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 6. & x_i & 1 \quad 5 \quad 6 \quad 8 \\
 & n_i & 5 \quad 15 \quad 20 \quad 10
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 7. & x_i & 1 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \\
 & n_i & 6 \quad 12 \quad 1 \quad 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 8. & x_i & 2 \quad 3 \quad 5 \quad 6 \\
 & n_i & 10 \quad 15 \quad 5 \quad 20
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 9. & x_i & -5 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\
 & n_i & 4 \quad 3 \quad 1 \quad 2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 10. & x_i & 1 \quad 2 \quad 4 \quad 7 \\
 & n_i & 1 \quad 3 \quad 6 \quad 2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 11. & x_i & 1 \quad 4 \quad 8 \quad 10
 \end{array}$$

n_i	5	2	2	1
-------	---	---	---	---

12.

x_i	-5	1	3	5
-------	----	---	---	---

n_i	2	4	3	1
-------	---	---	---	---

13.

x_i	1	5	9	11
-------	---	---	---	----

n_i	2	2	5	1
-------	---	---	---	---

14.

x_i	-2	1	2	3	4	5
-------	----	---	---	---	---	---

n_i	2	1	2	2	2	1
-------	---	---	---	---	---	---

15.

x_i	0	1	2	3	4
-------	---	---	---	---	---

n_i	5	2	1	1	1
-------	---	---	---	---	---

16.

x_i	1	5	6	8
-------	---	---	---	---

n_i	5	15	20	10
-------	---	----	----	----

17.

x_i	1	5	7	9
-------	---	---	---	---

n_i	6	12	1	1
-------	---	----	---	---

18.

x_i	2	3	5	6
-------	---	---	---	---

n_i	10	15	5	20
-------	----	----	---	----

19.

x_i	-5	2	3	4
-------	----	---	---	---

n_i	4	3	1	2
-------	---	---	---	---

20.	x_i	1	2	4	7
	n_i	1	3	6	2

ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №1

Пример . Даны матрицы A и B . E - единичная матрица. Найти:

а) матрицу $(A - 2E) \cdot B$; б) обратную матрицу A^{-1} и проверить, что

$$A^{-1} \cdot A = E:$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. а). Раскроем скобки, получим

$$(A - 2E) \cdot B = A \cdot B - 2E \cdot B = A \cdot B - 2B.$$

Применяя правило умножения матрицы на матрицу, имеем

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \\ 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \\ 3 \cdot 2 + 5 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$(A - 2E) \cdot B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

б). Обратную матрицу A^{-1} найдем, используя присоединенную матрицу A^+ .

Элементы присоединенной матрицы - это алгебраические дополнения

соответствующих элементов матрицы A , расположенные по столбцам:

$$A^+ = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица определяется формулой:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^+.$$

Вычислим определитель матрицы, проверим, что матрица невырожденная, следовательно, имеет обратную матрицу. Определитель найдем, раскрывая по элементам первой строки:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 - 2 \cdot (4 - 3) + 3 \cdot (10 - 9) = 2 \neq 0.$$

Находим алгебраические дополнения элементов исходной матрицы A :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = 1; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(4 - 3) = -1;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 9 = 1;$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 11; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7; \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7; \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1.$$

Итак, присоединенная матрица имеет вид:

$$A^+ = \begin{pmatrix} 1 & 11 & -7 \\ -1 & -7 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, обратная матрица равна

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 11 & -7 \\ -1 & -7 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 11/2 & -7/2 \\ -1/2 & -7/2 & 5/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Проверим, что обратная матрица найдена правильно, должно выполняться условие $A^{-1} \cdot A = E$. Вычислим элементы произведения матриц:

$$e_{11} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{11}{2} \cdot 2 + \left(-\frac{7}{2}\right) \cdot 3 = \frac{23-21}{2} = 1 \quad - \text{ верно,}$$

$$e_{21} = -\frac{1}{2} \cdot 1 + \left(-\frac{7}{2}\right) \cdot 2 + \frac{5}{2} \cdot 3 = \frac{-1-14+15}{2} = 0 \quad - \text{ верно,}$$

$$e_{31} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 3 = 0 \quad - \text{ верно.}$$

Пример . Методам Крамера решить систему линейных алгебраических уравнений: $A \cdot X = B$, где матрицы A и B заданы в условии задачи 1, а X -

матрица-столбец неизвестных $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Решение. Учитывая правило перемножения матриц, запишем подробный вид системы:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Получим решение по формулам Крамера: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$. Здесь

$\Delta = \det A = 2$ - определитель матрицы системы, он найден в задаче 1 при нахождении обратной матрицы. Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 - определители, полученные из определителя матрицы системы заменой соответственно первого, второго, третьего столбца матрицы столбцом правых частей:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

Таким образом, получаем,

$$x_1 = \frac{2}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{-2}{2} = -1, \quad x_3 = \frac{2}{2} = 1.$$

Получим решение матричным методом. В этом случае решение определяется формулой:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Обратная матрица была найдена при решении задачи 1. Поэтому сразу запишем

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 11/2 & -7/2 \\ -1/2 & -7/2 & 5/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \cdot 2 + 11/2 \cdot 0 - 7/2 \cdot 0 \\ -1/2 \cdot 2 - 7/2 \cdot 0 + 5/2 \cdot 0 \\ 1/2 \cdot 2 + 1/2 \cdot 0 - 1/2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая соответствующие элементы матриц слева и справа, снова находим

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1.$$

Получим решение методом Гаусса. При помощи элементарных преобразований строк расширенной матрицы $(A|B)$ последовательно исключаем неизвестные в уравнениях системы. На месте клетки A получим единичную матрицу E , при этом на месте клетки B появится вектор решения.

$$\begin{aligned} (A|B) &= \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim \begin{array}{l} 2c - 2 \times 1c \\ 3c - 3 \times 1c \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & -4 \\ 0 & -1 & -7 & -6 \end{array} \right) \sim 2c \times (-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -7 & -6 \end{array} \right) \sim \\ 1c - 2 \times 2c & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & -6 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array} \right) \sim 3c : (-2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & -6 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array} \right) \sim \begin{array}{l} 2c - 5 \times 3c \\ 1c + 7 \times 3c \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) = \end{aligned}$$

$$(E|X). \text{ И так, } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пример . Даны точки

$A(1; 0; -1), \quad B(2; 2; -3), \quad C(3; 1; 1), \quad D(4; -3; 5)$. Найти:

а). Координаты, модуль и направляющие косинусы вектора \overline{AB} ;

б). Проекцию вектора \overline{AB} на вектор \overline{CD} ;

- в). Скалярное произведение векторов \overline{AB} и \overline{BC} , а также угол между ними;
- г). Векторное произведение векторов \overline{AB} и \overline{AC} , а также площадь треугольника $\triangle ABC$;
- д). Смешанное произведение векторов \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{AD} , а также объем пирамиды $ABCD$.

Решение. а) Вектор \overline{AB} найдем по формуле $\overline{AB} = \{x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A\}$:

$$\overline{AB} = \{2 - 1; 2 - 0; -3 - (-1)\} = \{1; 2; -2\}. \text{ Модуль вектора } \mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$$

определяется соотношением $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$. Получаем отсюда

$$|\overline{AB}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3. \text{ Направляющие косинусы – это координаты орта}$$

вектора \overline{AB} . Т.е. вектора $\overline{AB}^0 = \frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} = \frac{\{1; 2; -2\}}{3} = \left\{\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right\}$. Направляющие

$$\text{косинусы равны: } \cos \alpha = \frac{1}{3}, \quad \cos \beta = \frac{2}{3}, \quad \cos \gamma = -\frac{2}{3}.$$

б). Проекцию вектора вычислим с помощью скалярного произведения:

$$np_{\overline{CD}} \overline{AB} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{|\overline{CD}|}.$$

Найдем вектор $\overline{CD} = \{1; -4; 4\}$. Учитывая формулу вычисления скалярного произведения векторов в координатах

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$

найдем проекцию

$$np_{\overline{CD}} \overline{AB} = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot (-4) + (-2) \cdot 4}{\sqrt{1^2 + (-4)^2 + 4^2}} = \frac{-15}{\sqrt{33}}.$$

в). Найдем вектор \overline{BC} и вычислим скалярное произведение векторов \overline{AB} и \overline{BC} . $\overline{BC} = \{1; -1; 4\}$.

$$\overline{AB} \cdot \overline{BC} = \{1; 2; -2\} \cdot \{1; -1; 4\} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + (-2) \cdot 4 = -9.$$

Косинус угла φ между векторами \overline{AB} и \overline{BC} определяется равенством

$$\cos \varphi = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{|\overline{AB}| |\overline{BC}|} = \frac{-9}{3\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 4^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда заключаем, что угол $\varphi = \frac{3}{4}\pi$.

Найдем вектор \overline{AC} и вычислим векторное произведение векторов с помощью формулы

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

$$\overline{AC} = \{2; 1; 2\}. \quad \overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + (-3)\mathbf{k} = \{6; 6; -3\}. \text{ Учитывая, что}$$

модуль векторного произведения – площадь параллелограмма, для площади треугольника имеем соотношение

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{1}{2} |\{6; 6; -3\}| = \frac{1}{2} \sqrt{6^2 + 6^2 + (-3)^2} = \frac{9}{2}.$$

д). Найдем вектор \overline{AD} и вычислим смешанное произведение по формуле

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Имеем } \overline{AD} = \{3; -3; 6\}. \quad (\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 18.$$

Учитывая, что модуль смешанного произведения численно равен объему параллелепипеда, построенного на векторах-сомножителях, а объем пирамиды составляет шестую часть объема параллелепипеда, получаем

$$V_{\text{пир}} = \frac{18}{6} = 3.$$

Пример . На плоскости даны вершины треугольника $\triangle ABC$. Найти:

- а). Канонические уравнения сторон AB и AC ;
- б). Уравнение высоты, опущенной из вершины B ;
- в). Внутренний угол $\angle A$;
- г). Уравнение медианы, проведенной из вершины B ;
- д). Расстояние от точки B до стороны AC . Сделать чертеж:
 $A(1;0), B(2;2), C(3;1)$.

Решение. а). Уравнения сторон найдем, используя уравнение прямой, проходящей через две заданные точки: $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

$$AB: \frac{y - 0}{2 - 0} = \frac{x - 1}{2 - 1}, \quad y = 2x - 2. \quad AC: \frac{y - 0}{1 - 0} = \frac{x - 1}{3 - 1}, \quad y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}. \text{ Угловой}$$

коэффициент прямой AC равен $k_{AC} = \frac{1}{2}$.

б). Угловой коэффициент высоты BH связан с угловым коэффициентом стороны AC соотношением $k_{AC} \cdot k_{BH} = -1$. Отсюда находим, $k_{BH} = -2$. Уравнение высоты составим, используя уравнение прямой, имеющей заданный наклон и проходящей через заданную точку:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

$$BH: y - 2 = -2(x - 2), \quad y = -2x + 6.$$

в). Для нахождения внутреннего угла $\angle A$ используем формулу

$$\operatorname{tg} \angle A = \frac{k_{AB} - k_{AC}}{1 + k_{AB} \cdot k_{AC}}.$$

$$\text{Получаем, } \operatorname{tg} \angle A = \frac{2 - 1/2}{1 + 2 \cdot 1/2} = \frac{3}{4}. \quad \angle A = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}.$$

г). Чтобы составить уравнение медианы, найдем координаты точки M - середины стороны AC : $x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{1 + 3}{2} = 2, \quad y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2}$.

$$BM: \frac{y - 2}{1/2 - 2} = \frac{x - 2}{2 - 2}, \quad x = 2 \text{ (каноническое уравнение вертикальной прямой).}$$

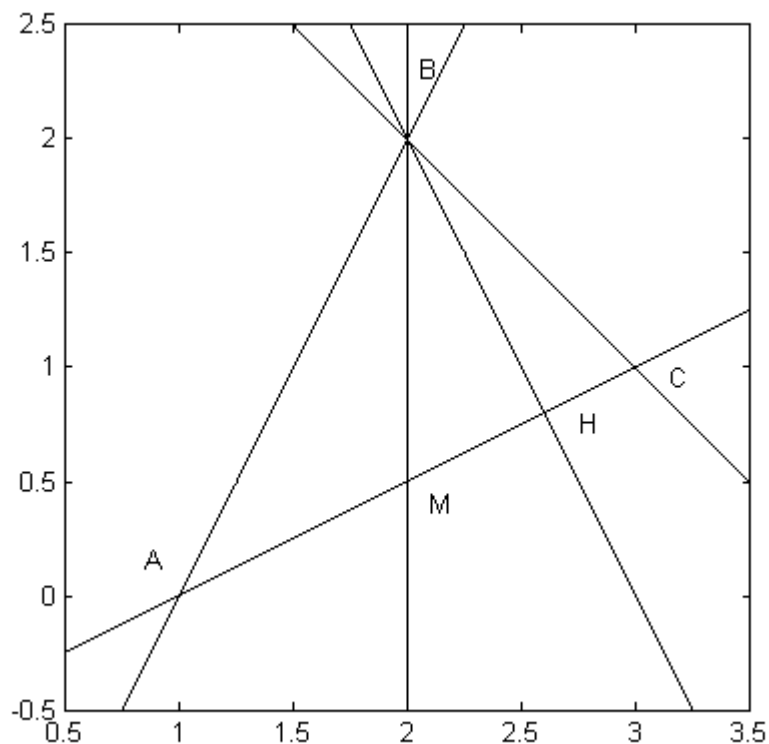
д). Расстояние от вершины B до стороны AC найдем по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \text{ где } Ax + By + C = 0 - \text{общее уравнение прямой, } (x_0; y_0) -$$

точка, от которой определяется расстояние. Общее уравнение стороны AC

имеет вид: $x - 2y - 1 = 0$. Поэтому $d = \frac{|2 - 2 \cdot 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

Строим треугольник в координатных осях:



Пример . Точки $A(1;2;3)$, $B(3;0;2)$, $C(6;3;-1)$, $D(4;1;5)$ являются вершинами пирамиды. Найти:

- Уравнения ребра AB ;
- Угол между ребрами AB и AC ;
- Уравнение грани ABC ;
- Угол между ребром AD и гранью ABC ;
- Уравнение высоты пирамиды, опущенной из вершины D , а также проекцию этой вершины на плоскость ABC .

Решение. а). Канонические уравнения прямой в пространстве, проходящей через две заданные точки, определяются соотношениями

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Следовательно, уравнения ребра AB имеют вид

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-2}{0-2} = \frac{z-3}{2-3}, \quad \text{или} \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{-1}.$$

б). Угол между ребрами - это угол φ между векторами \overline{AB} и \overline{AC} .

Эти векторы соответственно равны $\overline{AB} = \{2; -2; -1\}$ и $\overline{AC} = \{5; 1; -4\}$. Поэтому

$$\cos \varphi = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| |\overline{AC}|} = \frac{2 \cdot 5 + (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot (-4)}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2} \sqrt{5^2 + 1^2 + (-4)^2}} = \frac{4}{\sqrt{42}}.$$

в). Составим уравнение грани ABC , используя условие компланарности векторов \overline{AB} , \overline{AC} и текущего вектора $\overline{AM} = \{x-1; y-2; z-3\}$:

$$(\overline{AM}, \overline{AB}, \overline{AC}) = \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 5 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим

$$(x-1) \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} - (y-2) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} + (z-3) \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \\ 3x + y + 4z - 17 = 0.$$

г). Угол α между прямой с направляющим вектором \mathbf{a} и плоскостью с нормальным вектором \mathbf{N} определяется формулой

$$\sin \alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{N}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{N}|}.$$

Направляющий вектор ребра равен $\mathbf{a} = \overline{AD} = \{3; -1; 2\}$, координаты нормального вектора плоскости – это коэффициенты в общем уравнении плоскости, т.е. $\mathbf{N} = \{3; 1; 4\}$. Отсюда получаем

$$\sin \alpha = \frac{3 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 4}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} \sqrt{3^2 + 1^2 + 4^2}} = \frac{8}{\sqrt{91}}, \quad \alpha = \arcsin \frac{8}{\sqrt{91}}.$$

д). Направляющим вектором высоты пирамиды, опущенной из вершины D , является нормальный вектор плоскости $\mathbf{N} = \{3; 1; 4\}$. Поэтому канонические уравнения высоты следующие

$$\frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{4}.$$

Проекцию P вершины D на плоскость основания найдем как пересечение прямой DP и плоскости ABC . Для этого от канонических уравнений высоты перейдем к параметрическим уравнениям:

$$\frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{4} = t, \quad x = 3t + 4, \quad y = t + 1, \quad z = 4t + 5$$

Подставляя последние соотношения в уравнение плоскости ABC , получаем уравнение для определения значения параметра t , соответствующего точке P :

$$3(3t + 4)t + 1 + 4(4t + 5) - 17 = 0, \quad t = -\frac{8}{13}.$$

Подставляя полученное значение t в параметрические уравнения высоты, находим координаты точки P :

$$x = 3\left(-\frac{8}{13}\right) + 4 = \frac{28}{13}, \quad y = -\frac{8}{13} + 1 = \frac{5}{13}, \quad z = 4\left(-\frac{8}{13}\right) + 5 = \frac{33}{13}.$$

Пример . Найти пределы функций: а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x-1)(4x+1)}{x^2 + 2x + \sqrt{x} + 3}$; б) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x-8}-1}{x^2-81}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{1 - \cos 2x}$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+2} \right)^x$

Решение.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x-1)(4x+1)}{x^2 + 2x + \sqrt{x} + 3} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) \text{ Чтобы раскрыть неопределенность типа } \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

необходимо и в числителе и в знаменателе в каждом из сомножителей вынести старшие

$$\text{степени} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(3 - \frac{1}{x} \right) x \left(4 + \frac{1}{x} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x^2} + \frac{3}{x^2} \right)} = \frac{(3-0)(4+0)}{(1+0+0+0)} = 12;$$

б)

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x-8}-1}{x^2-81} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(\sqrt{x-8}-1)(\sqrt{x-8}+1)}{(\sqrt{x-8}+1)(x-9)(x+9)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-8-1}{(\sqrt{9-8}+1)(x-9)(9+9)} = \frac{1}{36}$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{1 - \cos 2x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x 2 \sin x \cos x}{2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos 0}{\sin x} = 1;$$

Здесь использован первый замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

г)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+2} \right)^x = (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-3}{3x+2} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-3}{3x+2} \right)^{\frac{3x+2}{-3}} \right]^{\frac{-3}{3x+2} x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-3x}{\frac{3x+2}{x}}} = \frac{1}{e}$$

Здесь применен второй замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$.

Пример . Используя определение, найти производную функции $y = x^2 + 3x$ в точке $x_0 = 1$.

Решение.

$$\text{По определению } y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x}.$$

$$y(x_0) = y(1) = 1^2 + 3 \cdot 1 = 4, \quad y(x_0 + \Delta x) = y(1 + \Delta x) = (1 + \Delta x)^2 + 3(1 + \Delta x) = 4 + 5\Delta x + \Delta x^2$$

Отсюда

$$y'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4 + 5\Delta x + \Delta x^2 - 4}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(5 + \Delta x)}{\Delta x} = 5.$$

Для решения примеров **задания 8** предполагается использование правил дифференцирования и таблицы производных основных элементарных функций:

Правила дифференцирования

1. $c' = 0$, $c - const$
2. $(ku)' = ku'$, $k - const$
3. $(u + v)' = u' + v'$ - производная суммы
4. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ - производная произведения
5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ - производная дроби
6. Производная сложной функции:

$$\left[y(u(x)) \right]' = y'_u \cdot u'_x$$

(вначале производная внешней функции по промежуточному аргументу)

Таблица производных

$$x' = 1 \quad (1) \quad (u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u' \quad (2)$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} u' \quad (3) \quad \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} u' \quad (4)$$

$$(e^u)' = e^u u' \quad (5) \quad (a^u)' = a^u \ln a u' \quad (6)$$

$$(\ln u)' = \frac{1}{u} u' \quad (7) \quad (\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} u' \quad (8)$$

$$(\sin u)' = \cos u u' \quad (9) \quad (\cos u)' = -\sin u u' \quad (10)$$

$$(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} u' \quad (11)$$

$$(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} u' \quad (12)$$

$$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u' \quad (13)$$

$$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u' \quad (14)$$

$$(\arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} u' \quad (15)$$

$$(\text{arcctgu})' = -\frac{1}{1+u^2} u' \quad (16)$$

Особое внимание следует обратить на правило 6 для производных сложных функций. В примере 8в) необходимо вычислить производную **неявной** функции, а в примере 8г) - производную функции, заданной **параметрически**.

(Можно использовать формулу $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$).

Таблица основных интегралов

$$1. \int 0 du = C; \quad C = \text{const};$$

$$2. \int du = u + C;$$

$$3. \int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1;$$

$$3a. \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C;$$

$$4. \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C;$$

$$5. \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C;$$

$$6. \int e^u du = e^u + C;$$

$$7. \int \cos u du = \sin u + C;$$

$$8. \int \sin u du = -\cos u + C;$$

$$9. \int \frac{du}{\cos^2 u} = \text{tgu} + C;$$

$$10. \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\text{ctgu} + C;$$

$$11. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C;$$

$$12. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C;$$

$$13. \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \text{arctg} \frac{u}{a} + C;$$

$$14. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C;$$

$$15. \int \frac{du}{\sin u} = \ln \left| \text{tg} \frac{u}{2} \right| + C;$$

$$16. \int \frac{du}{\cos u} = \ln \left| \text{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C;$$

$$17. \int \text{tgu} du = -\ln |\cos u| + C;$$

$$18. \int \operatorname{ctg} u du = \ln |\sin u| + C.$$

Пример . Пользуясь таблицей основных интегралов и свойствами неопределенного интеграла, найти интегралы (результат интегрирования проверить дифференцированием):

$$a) \int \left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}} - \frac{3x^3+1}{x^4} + 2\sqrt[6]{x^5} \right) dx; \quad \acute{a}) \int \left(\frac{5}{11x^2+2} + 3 \cdot 5^x + \frac{16-x^2}{4+x} \right) dx.$$

Решение.

$$\begin{aligned} a) \int \left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}} - \frac{3x^3+1}{x^4} + 2\sqrt[6]{x^5} \right) dx &= \int \left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}} - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^4} + 2x^{5/6} \right) dx = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{используем свойства 3 и 4 и разобьем интеграл от суммы} \\ \text{функции на сумму интегралов, при этом постоянные} \\ \text{множители вынесем за знак интегралов} \end{array} \right\} = \\ &= 5 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+7}} - 3 \int \frac{dx}{x} - \int x^{-4} dx + 2 \int x^{5/6} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{используем табличные} \\ \text{интегралы 12, 4, 3} \end{array} \right\} = \\ &= 5 \ln \left| x + \sqrt{x^2+7} \right| - 3 \ln |x| - \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + 2 \cdot \frac{x^{5/6+1}}{5/6+1} + C = \\ &= 5 \ln \left| x + \sqrt{x^2+7} \right| - 3 \ln |x| + \frac{1}{3x^3} + \frac{12}{11} x^{11/6} + C. \end{aligned}$$

2. Метод замены переменной

Теорема 1. Пусть $x = \varphi(t)$ монотонная, непрерывно дифференцируемая функция, тогда

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \quad (1)$$

При этом, если $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(t) + C$, то $\int f(x)dx = F(\psi(x)) + C$, где $\psi(x)$ — функция, обратная $\varphi(t)$.

Формула (1) называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле.

Алгоритм замены переменной:

- 1) Связать старую переменную интегрирования x с новой переменной t с помощью замены $x = \varphi(t)$.
- 2) Найти связь между дифференциалами $dx = \varphi'(t)dt$.
- 3) Перейти под знаком интеграла к новой переменной.
- 4) Проинтегрировать и в полученной первообразной вернуться к старой переменной, подставив $t = \psi(x)$.

Среди интегралов, вычисляемых с помощью замены переменной, выделим интегралы вида:

$$\int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} dx \quad \text{и} \quad \int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx.$$

При их вычислении необходимо выделить в знаменателе полный квадрат, для чего используется стандартная замена:

$$x = t - \frac{b}{2a}, \quad dx = dt, \quad t = x + \frac{b}{2a}. \quad (2)$$

Пример . Проинтегрировать подходящей заменой переменной (подведение под знак дифференциала).

$$a) \int \cos 4x dx; \quad б) \int e^{9x+1} dx; \quad в) \int x(2-x^2)^5 dx; \quad г) \int \frac{x-2}{x^2+6x+10} dx.$$

Решение:

$$a) \int \cos 4x dx = \left| \begin{array}{l} t = 4x \\ dt = (4x)' = 4dx \\ dx = \frac{dt}{4} \end{array} \right| = \int \cos t \frac{dt}{4} = \frac{1}{4} \int \cos t dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 7} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{4} \sin t + C = \frac{1}{4} \sin 4x + C.$$

$$б) \int e^{9x+1} dx = \left| \begin{array}{l} t = 9x+1 \\ dt = (9x+1)' = 9dx \\ dx = \frac{dt}{9} \end{array} \right| = \int e^t \frac{dt}{9} = \frac{1}{9} \int e^t dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 6} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{9} e^t + C = \frac{1}{9} e^{9x+1} + C.$$

$$в) \int x(2-x^2)^5 dx = \left| \begin{array}{l} t = 2-x^2 \\ dt = (2-x^2)' = -2x dx \\ x dx = \frac{dt}{-2} \end{array} \right| = \int t^5 \left(-\frac{dt}{2} \right) = -\frac{1}{2} \int t^5 dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 3} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{t^6}{6} + C = -\frac{1}{12} (2-x^2)^6 + C.$$

$$г) \int \frac{x-2}{x^2+6x+10} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Используем замену (2),} \\ \text{учтем, что } a=1, \quad b=6 \end{array} \right\} = \left| \begin{array}{l} x = t-3 \\ dx = dt \\ t = x+3 \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{t-3-2}{(t-3)^2 + 6(t-3) + 10} dt = \int \frac{t-5}{t^2 - 6t + 9 + 6t - 18 + 10} dt = \int \frac{t-5}{t^2 + 1} dt = \int \frac{tdt}{t^2 + 1} - \\
&- 5 \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \left| \begin{array}{l} \text{для 1-го интеграла} \\ z = t^2 + 1 \\ dz = 2tdt; tdt = \frac{dz}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z} - 5 \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \left\{ \begin{array}{l} \text{формулы 4, 13} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \ln|z| - \\
&- 5 \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2} \ln|t^2 + 1| - 5 \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 6x + 10| - 5 \operatorname{arctg}(x + 3) + C.
\end{aligned}$$

2. Определенный интеграл, его вычисление и свойства

Определенный интеграл от функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$, вычисляется по формуле:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a), \quad (5)$$

где $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$.

Формула (5) называется *формулой Ньютона — Лейбница*.

Свойства определенного интеграла:

$$1) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx; \quad 2) \int_a^a f(x) dx = 0;$$

$$3) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx;$$

$$4) \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx;$$

$$5) \int_a^b C f(x) dx = C \int_a^b f(x) dx, \quad C - \text{const};$$

$$6) \text{ Если } f(x) \leq g(x) \text{ для всех } x \in [a, b], \text{ то } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx;$$

7) Если $m \leq f(x) \leq M$ для всех $x \in [a, b]$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

При вычислении определенного интеграла для нахождения первообразной используют те же методы, что и для нахождения неопределенного интеграла, т. е. замену переменной, интегрирование по частям и т. д. Однако есть ряд особенностей. При замене переменной по формуле (1) необходимо в соответствии с заменой менять пределы интегрирования:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt, \quad (6)$$

где $\alpha = \varphi(a)$, $\beta = \varphi(b)$, $t = \varphi(x)$ — обратная к $x = \varphi(t)$ функция.

Формула интегрирования по частям (3) приобретает вид:

$$\int_a^b U dV = UV \Big|_a^b - \int_a^b V dU, \quad (7)$$

Определенный интеграл широко используется в различных приложениях, например, при вычислении площадей плоских фигур, длин дуг плоских кривых, объемов тел вращения, площадей поверхностей вращения, работы переменной силы на отрезке, пути, пройденного за промежуток времени, статических моментов и моментов инерции плоских дуг и фигур и т. д.

Площади плоских фигур

2.8.1. Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат

Если плоская фигура (рис. 1) ограничена линиями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, где $f_2(x) \geq f_1(x)$ для всех $x \in [a, b]$, и прямыми $x = a$, $x = b$, то ее площадь вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx. \quad (8)$$

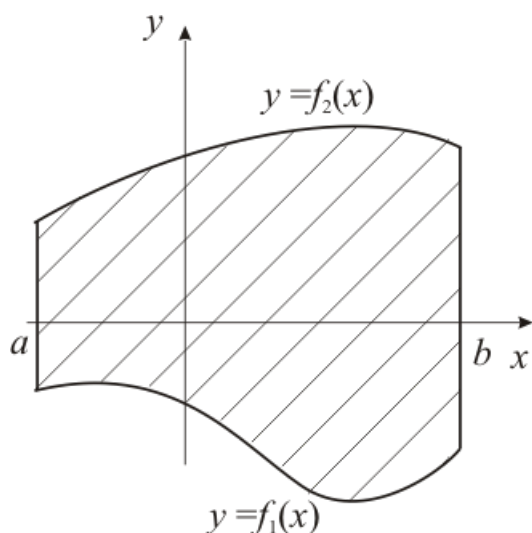


Рис. 1

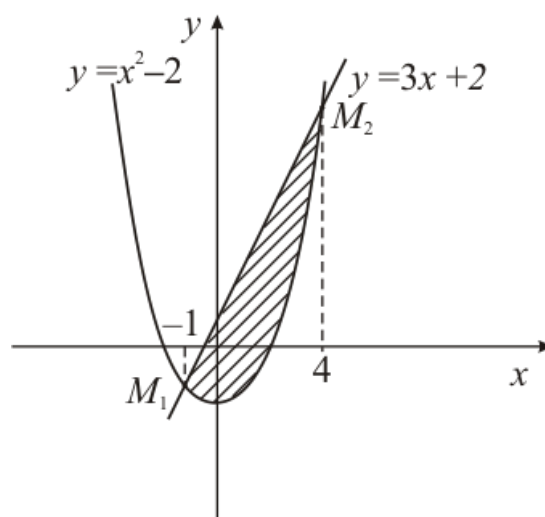


Рис. 2

Пример . Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2 - 2, \quad y = 3x + 2.$$

Решение. Построим схематический рисунок (рис. 2). Для построения параболы возьмем несколько точек:

x	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4
y	-2	-1	-1	2	2	7	7	14	14

Для построения прямой достаточно двух точек, например $(0, 2)$ и $(-1, -1)$.

Найдем координаты точек M_1 и M_2 пересечения параболы $y = x^2 - 2$ и прямой $y = 3x + 2$.

Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ y = 3x + 2. \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2 = 3x + 2, \quad x^2 - 3x - 4 = 0, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 4.$$

Тогда $y_1 = 3 \cdot (-1) + 2 = -1$, $y_2 = 3 \cdot 4 + 2 = 14$. Итак, $M_1(-1, -1)$, $M_2(4, 14)$.

Площадь полученной фигуры найдем по формуле (8), в которой $f_2(x) = 3x + 2$, $f_1(x) = x^2 - 2$, поскольку $f_2(x) \geq f_1(x)$ для всех $x \in [-1, 4]$.

Получим:

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-1}^4 \left(3x + 2 - (x^2 - 2) \right) dx = \int_{-1}^4 (3x - x^2 + 4) dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 4x \right) \bigg|_{-1}^4 = \\
&= \frac{3 \cdot 4^2}{2} - \frac{4^3}{3} + 4 \cdot 4 - \left(\frac{3 \cdot (-1)^2}{2} - \frac{(-1)^3}{3} + 4 \cdot (-1) \right) = 24 - \frac{64}{3} + 16 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 4 = \\
&= 44 - \frac{65}{3} - \frac{3}{2} = \frac{125}{6} = 20 \frac{5}{6} \text{ (кв.ед.)}
\end{aligned}$$

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

1. Элементы комбинаторики *Размещением с повторениями* из n по m элементов называется конечная последовательность $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m})$ элементов некоторого множества $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Если все члены выборки различны, то последовательность называется *размещением без повторений*. *Размещения без повторения* - m -элементные выборки, различающиеся либо входящими элементами, либо порядком их следования. *Размещение с повторениями* – это выборка с возвращением выбираемых элементов. Число всех возможных *размещений с повторениями* равно n^m (число комбинаций, выбираемых из m групп, содержащих по n элементов). *Размещение без повторения* – выборка без возвращения выбираемых элементов. Общее число различных комбинаций – *размещений без повторений* обозначается символом A_n^m и равно $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1)$ (количество выборок из m групп, содержащих соответственно $n, (n-1), \dots, (n-m+1)$ элементов).

Перестановками называются размещения из n по n элементов. Общее число перестановок обозначают символом P_n .

Сочетаниями из n по m элементов называются m -элементные подмножества множества $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, имеющие различный состав элементов. Два сочетания считаются различными, если хотя бы один элемент входит в одну комбинацию, но не входит в другую. Общее число различных сочетаний обозначают символом C_n^m .

Число размещений, перестановок и сочетаний определяются формулами:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}, \quad P_n = n!, \quad C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

2. Классическое определение вероятности

$P(A) = \frac{m}{n}$, где n – общее число элементарных событий (исходов, которые в данном опыте образуют конечную полную группу равновозможных попарно несовместных событий), m – число элементарных событий, благоприятствующих наступлению события A .

3. Геометрическое определение вероятности

$$P(A) = \frac{\text{мера}(A)}{\text{мера}(\Omega)}. \text{ Вероятность попадания точки в какую либо часть } A$$

области Ω пропорциональна мере (длине, площади, объему и т.д.) этой части и не зависит от ее расположения и формы.

4. Основные свойства вероятности

Вероятность любого события A - число, заключенное между 0 и 1. Вероятность невозможного события равна 0. Вероятность достоверного события равна 1.

Сумма вероятностей противоположных событий равна 1:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Вероятность появления одного из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Для любых двух событий A и B имеет место формула (теорема сложения для произвольных событий):

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Для полной группы несовместных событий A_1, A_2, \dots, A_n

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1$$

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое имело место:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) \quad - \text{теорема умножения.}$$

Если события A и B – независимые, то

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) \quad - \text{теорема умножения.}$$

5. Формула полной вероятности. Формулы Байеса

Если известно, что событие A может произойти с одним из событий H_1, H_2, \dots, H_n (гипотез), образующих полную группу попарно несовместных событий, то вероятность события A определяется по формуле полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A/H_i)$$

Вероятности гипотез после того как имело место событие A переоценивают по формулам Байеса:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A/H_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Пример . В ящике находится 10 деталей. Из них 3 дефектные. Наудачу отобраны 3 детали. Какова вероятность того, что:

- а) все детали дефектные (*событие A*);
- б) только одна деталь дефектная (*событие B*);
- в) все три детали годные (*событие C*);
- г) хотя бы одна деталь дефектная (*событие D*).

Решение. Используем классическое определение вероятности.

а) *Событие A* = {выбранные три детали дефектные};

$$P(A) = \frac{M}{N}$$

Элементарное событие в данной задаче - комбинация (сочетание) из трех деталей. $N = C_{10}^3$ - общее число способов выбрать 3 детали из имеющихся 10 деталей.

$M = 1$ (имеется всего один вариант выбора 3 дефектных деталей).

$$P(A) = \frac{1}{C_{10}^3} = \frac{1}{\frac{10!}{(10-3)! \cdot 3!}} = \frac{7! \cdot 3!}{10!} = \frac{1}{120}.$$

б) *Событие B* = {из трех выбранных деталей 1 деталь дефектная, две детали без дефекта};

$$P(B) = \frac{M}{N},$$

где $M = C_3^1 \cdot C_7^2$ - количество вариантов, благоприятствующих появлению события B, при которых 1 дефектная деталь выбирается из группы 3 дефектных и 2 бездефектные детали выбираются из группы 7 бездефектных деталей $N = C_{10}^3$

$$\text{Следовательно, } P(B) = \frac{C_3^1 \cdot C_7^2}{C_{10}^3} = \frac{\frac{3!}{2! \cdot 1!} \cdot \frac{7!}{5! \cdot 2!}}{\frac{10!}{7! \cdot 3!}} = \frac{7}{45}.$$

в) *Событие C* = {выбранные три детали бездефектные}

$$P(C) = \frac{C_7^3}{C_{10}^3} = \frac{\frac{7!}{4! \cdot 3!}}{\frac{10!}{7! \cdot 3!}} = \frac{7}{24}.$$

г) Событие $D = \{\text{хотя бы одна из трех выбранных деталей бездефектная}\}.$

Рассмотрим противоположное событие $\bar{D}.$

$\bar{D} = C = \{\text{среди трех выбранных деталей нет дефектных}\}.$ Так как

$$P(D) = 1 - P(\bar{D}), \text{ то } P(D) = 1 - P(C) = 1 - \frac{7}{24} = \frac{17}{24}.$$

Пример . В ящике лежат 20 теннисных мячей, в том числе 15 новых и 5 иггранных. Для игры наудачу выбираются два мяча и после игры возвращаются обратно. Затем для второй игры также наудачу извлекается ещё 2 мяча. Какова вероятность того, что вторая игра будет проводиться новыми мячами?

Решение. Рассмотрим предположения (гипотезы):

$H_1 = \{\text{на первую игру выбирают два новых мяча}\}.$

$H_2 = \{\text{на первую игру выбирают один новый мяч, и один иггранный}\}.$

$H_3 = \{\text{на первую игру выбирают два иггранных мяча}\}.$

Вероятности гипотез соответственно равны:

$$P(H_1) = \frac{C_{15}^2}{C_{20}^2} = \frac{\frac{15!}{13! \cdot 2!}}{\frac{20!}{18! \cdot 2!}} = \frac{21}{38}, \quad P(H_2) = \frac{C_{15}^1 \cdot C_5^1}{C_{20}^2} = \frac{15}{38}, \quad P(H_3) = \frac{C_5^2}{C_{20}^2} = \frac{\frac{5!}{3! \cdot 2!}}{\frac{20!}{18! \cdot 2!}} = \frac{2}{38}.$$

Проверка: $\sum p(H_i) = 1$ - выполняется: $\frac{21}{38} + \frac{15}{38} + \frac{2}{38} = 1.$

Пусть, событие $A = \{\text{вторая игра проводится двумя новыми мячами}\}.$ Тогда условные вероятности следующие:

$$P(A|H_1) = \frac{C_{13}^2}{C_{20}^2} = \frac{\frac{13!}{11! \cdot 2!}}{\frac{20!}{18! \cdot 2!}} = \frac{39}{95}, \quad P(A|H_2) = \frac{C_{14}^2}{C_{20}^2} = \frac{\frac{14!}{12! \cdot 2!}}{\frac{20!}{18! \cdot 2!}} = \frac{91}{190}, \quad P(A|H_3) = \frac{C_{15}^2}{C_{20}^2} = \frac{21}{38}.$$

Вероятность события A найдем по формуле полной вероятности:

$$P(A) = \frac{21}{38} \cdot \frac{39}{95} + \frac{15}{38} \cdot \frac{91}{190} + \frac{1}{19} \cdot \frac{21}{38} = 0,4450138.$$

Пример . а) На грядке высажено 8 луковиц определенного сорта тюльпанов. Всхожесть луковиц 80%. Какова вероятность, что взойдет не менее 5, но не более 7 растений.

Решение. Событие $A = \{\text{взойдет отдельный тюльпан}\}$.

Событие $B = \{\text{взойдет от 5 до 7 растений}\}$.

Пусть событие $B_5 = \{\text{взойдет ровно 5 тюльпанов}\}$, событие $B_6 = \{\text{взойдет ровно 6 тюльпанов}\}$, событие $B_7 = \{\text{взойдет ровно 7 тюльпанов}\}$.

Вероятность события B_k , состоящего в том, что событие A произойдет ровно k раз при n независимых испытаниях, рассчитывается по формуле Бернулли:

$$P(B_k) = P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \text{ где } q = 1 - p.$$

В частности,

$$P(B_5) = P_8(5) = C_8^5 \left(\frac{4}{5}\right)^5 \left(\frac{1}{5}\right)^3 = 0,147,$$

$$P(B_6) = P_8(6) = C_8^6 \left(\frac{4}{5}\right)^6 \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 0,294,$$

$$P(B_7) = P_8(7) = C_8^7 \left(\frac{4}{5}\right)^7 \left(\frac{1}{5}\right)^1 = 0,335.$$

В данном случае имеем $B = B_5 + B_6 + B_7$. По теореме сложения для несовместных событий получаем

Пример . Составить закон распределения дискретной случайной величины (ДСВ) X - оценки, полученной на экзамене наугад выбранным студентом. Известно, что в группе из 20 человек 2 студента получили оценку – «2», 6 студентов – «3», 10 студентов – «4» и 2 студента – «5». Построить график функции распределения. Вычислить числовые характеристики $M(X), D(X), \sigma(X)$.

Решение: ДСВ X - отметка студента, которая может принять значения 2; 3; 4 или 5. Вероятность события $\{X=2\}$ равна $P(X=2)=p_1=2/20$, (число двоек - 2, а общее число студентов 20). Вероятности других возможных значений равны:

$$P(X=3)=p_2=\frac{6}{20}, \quad P(X=4)=p_3=\frac{10}{20}, \quad P(X=5)=p_4=\frac{2}{20}.$$

Следовательно, закон распределения ДСВ имеет вид:

X	2	3	4	5
P	0,1	0,3	0,5	0,1

Контроль: $0,1+0,3+0,5+0,1=1$

Найдем числовые характеристики данной случайной величины.

Математическое ожидание:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,5 + 5 \cdot 0,1 = 0,2 + 0,9 + 2 + 0,5 = 3,6.$$

Дисперсия:

$$\begin{aligned} D(X) &= \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2 \cdot p_i = (2 - 3,6)^2 \cdot 0,1 + (3 - 3,6)^2 \cdot 0,3 + \\ &+ (4 - 3,6)^2 \cdot 0,5 + (5 - 3,6)^2 \cdot 0,1 = \\ &= 2,56 \cdot 0,1 + 0,36 \cdot 0,3 + 0,16 \cdot 0,5 + 1,96 \cdot 0,1 = 0,64 \end{aligned}$$

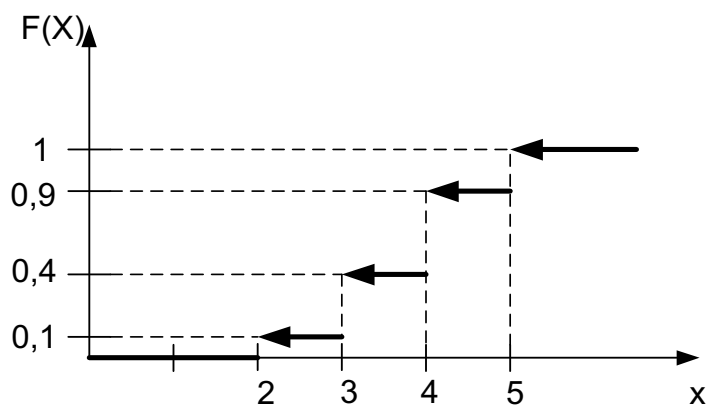
Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,64} = 0,8.$$

Функция распределения $F(X)$ имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 2 \\ 0,1, & \text{если } 2 < x \leq 3 \\ 0,1 + 0,3, & \text{если } 3 < x \leq 4 \\ 0,1 + 0,3 + 0,5, & \text{если } 4 < x \leq 5 \\ 1, & \text{если } x > 5 \end{cases}$$

График функции распределения имеет вид:



Пример . Из группы населения случайным образом отобрано 10 человек и собраны их доходы за истекший год в тысячах рублей $x_1, x_2, x_3 \dots x_{10}$. Найти выборочное среднее исправленную выборочную дисперсию. Считая распределение доходов в группе нормальным и, применяя в качестве его параметров выборочные характеристики, определить, какой процент населения имеет годовой доход, превышающий 100 тыс. рублей.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
80	110	130	100	70	90	150	60	90	70

Решение.

Найдем выборочную среднюю:

$$\bar{X} = \frac{110 + 130 + 100 + 70 + 90 + 150 + 60 + 80 + 90 + 70}{10} = \frac{950}{10} = 95.$$

Вычислим выборочную дисперсию D_s .

$$D_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{10} (x_i - M_s)^2, n=10.$$

$$\begin{aligned} D_s &= \frac{1}{10} [(80-95)^2 + (110-95)^2 + (130-95)^2 + (100-95)^2 + (70-95)^2 + \\ &+ (90-95)^2 + (150-95)^2 + (60-95)^2 + (90-95)^2 + (70-95)^2] = \\ &= \frac{1}{10} [225 + 225 + 1225 + 25 + 625 + 25 + 3025 + 1225 + 25 + 625] = \frac{7250}{10} = 725 \end{aligned}$$

Исправленная выборочная дисперсия:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_s = \frac{10}{9} \cdot 725 = 805,56.$$

$$\sigma = \sqrt{S^2} = 28,4.$$

Чтобы найти процент группы населения, которая имеет доход, превышающий 100 тыс. руб. используем формулу попадания значений нормально распределенной случайной величины в заданный промежуток:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \text{ где } \Phi - \text{функция Лапласа.}$$

В данном случае принимаем следующие значения параметров:

$\alpha = 100$ тыс.руб., $a = \bar{x} = 95$ тыс.руб., $\sigma = \sqrt{S^2} = S = 28,4$ тыс. руб.,

$\beta \gg 100$ тыс.руб. (нет ограничений сверху). Имеем:

$$P(X > 100) = P(100 < X < \infty) = \Phi\left(\frac{\infty - 95}{28,4}\right) - \Phi\left(\frac{100 - 95}{28,4}\right) = \Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{5}{28,4}\right) = 0,5 - \Phi(0,176)$$

По таблице находим: $\Phi(0,176) = 0,07$, следовательно, $P(X > 100) \approx 0,43$.

Пример 1. Даны матрицы A и B . E - единичная матрица. Найти:

а) матрицу $(A - 2E) \cdot B$; б) обратную матрицу A^{-1} и проверить, что

$$A^{-1} \cdot A = E:$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. а). Раскроем скобки, получим

$$(A - 2E) \cdot B = A \cdot B - 2E \cdot B = A \cdot B - 2B.$$

Применяя правило умножения матрицы на матрицу, имеем

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \\ 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \\ 3 \cdot 2 + 5 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$(A - 2E) \cdot B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

б). Обратную матрицу A^{-1} найдем, используя присоединенную матрицу A^+ .

Элементы присоединенной матрицы - это алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы A , расположенные по столбцам:

$$A^+ = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица определяется формулой:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^+.$$

Вычислим определитель матрицы, проверим, что матрица невырожденная, следовательно, имеет обратную матрицу. Определитель найдем, раскрывая по элементам первой строки:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 - 2 \cdot (4 - 3) + 3 \cdot (10 - 9) = 2 \neq 0.$$

Находим алгебраические дополнения элементов исходной матрицы A :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = 1; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(4 - 3) = -1;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 9 = 1;$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 11; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7; \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7; \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1.$$

Итак, присоединенная матрица имеет вид:

$$A^+ = \begin{pmatrix} 1 & 11 & -7 \\ -1 & -7 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, обратная матрица равна

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 11 & -7 \\ -1 & -7 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 11/2 & -7/2 \\ -1/2 & -7/2 & 5/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Проверим, что обратная матрица найдена правильно, должно выполняться условие $A^{-1} \cdot A = E$. Вычислим элементы произведения матриц:

$$e_{11} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{11}{2} \cdot 2 + \left(-\frac{7}{2}\right) \cdot 3 = \frac{23 - 21}{2} = 1 \quad - \text{ верно},$$

$$e_{21} = -\frac{1}{2} \cdot 1 + \left(-\frac{7}{2}\right) \cdot 2 + \frac{5}{2} \cdot 3 = \frac{-1 - 14 + 15}{2} = 0 \quad - \text{ верно},$$

$$e_{31} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 3 = 0 \quad - \text{ верно}.$$

Пример 2. Тремя методами (Крамера, матричным методом и методом Гаусса) решить систему линейных алгебраических уравнений: $A \cdot X = B$, где

матрицы A и B заданы в условии задачи 1, а X - матрица-столбец

неизвестных $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Решение. Учитывая правило перемножения матриц, запишем подробный вид системы:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Получим решение по формулам Крамера: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$. Здесь

$\Delta = \det A = 2$ - определитель матрицы системы, он найден в задаче 1 при нахождении обратной матрицы. Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 - определители, полученные из определителя матрицы системы заменой соответственно первого, второго, третьего столбца матрицы столбцом правых частей:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

Таким образом, получаем,

$$x_1 = \frac{2}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{-2}{2} = -1, \quad x_3 = \frac{2}{2} = 1.$$

Получим решение матричным методом. В этом случае решение определяется формулой:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Обратная матрица была найдена при решении задачи 1. Поэтому сразу запишем

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 11/2 & -7/2 \\ -1/2 & -7/2 & 5/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \cdot 2 + 11/2 \cdot 0 - 7/2 \cdot 0 \\ -1/2 \cdot 2 - 7/2 \cdot 0 + 5/2 \cdot 0 \\ 1/2 \cdot 2 + 1/2 \cdot 0 - 1/2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая соответствующие элементы матриц слева и справа, снова находим

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1.$$

Получим решение методом Гаусса. При помощи элементарных преобразований строк расширенной матрицы $(A|B)$ последовательно исключаем неизвестные в уравнениях системы. На месте клетки A получим единичную матрицу E , при этом на месте клетки B появится вектор решения.

$$\begin{aligned} (A|B) &= \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim \begin{array}{l} 2c - 2 \times 1c \\ 3c - 3 \times 1c \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & -4 \\ 0 & -1 & -7 & -6 \end{array} \right) \sim 2c \times (-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -7 & -6 \end{array} \right) \sim \\ 1c - 2 \times 2c & \quad 3c + 2c \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & -6 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array} \right) \sim 3c : (-2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & -6 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array} \right) \sim \begin{array}{l} 2c - 5 \times 3c \\ 1c + 7 \times 3c \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) = \end{aligned}$$

$$(E|X). \text{ Итак, } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Даны точки

$A(1; 0; -1), \quad B(2; 2; -3), \quad C(3; 1; 1), \quad D(4; -3; 5)$. Найти:

- Координаты, модуль и направляющие косинусы вектора \overline{AB} ;
- Проекцию вектора \overline{AB} на вектор \overline{CD} ;
- Скалярное произведение векторов \overline{AB} и \overline{BC} , а также угол между ними;
- Векторное произведение векторов \overline{AB} и \overline{AC} , а также площадь треугольника $\triangle ABC$;
- Смешанное произведение векторов $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$, а также объем пирамиды $ABCD$.

Решение. а) Вектор \overline{AB} найдем по формуле $\overline{AB} = \{x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A\}$:

$$\overline{AB} = \{2 - 1; 2 - 0; -3 - (-1)\} = \{1; 2; -2\}. \text{ Модуль вектора } \mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$$

определяется соотношением $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$. Получаем отсюда

$|\overline{AB}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$. Направляющие косинусы – это координаты орта вектора \overline{AB} . Т.е. вектора $\overline{AB}^0 = \frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} = \frac{\{1; 2; -2\}}{3} = \left\{\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right\}$. Направляющие

косинусы равны: $\cos \alpha = \frac{1}{3}, \quad \cos \beta = \frac{2}{3}, \quad \cos \gamma = -\frac{2}{3}$.

б). Проекцию вектора вычислим с помощью скалярного произведения:

$$np_{\overline{CD}} \overline{AB} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{|\overline{CD}|}.$$

Найдем вектор $\overline{CD} = \{1; -4; 4\}$. Учитывая формулу вычисления скалярного произведения векторов в координатах

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$

найдем проекцию

$$np_{\overline{CD}} \overline{AB} = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot (-4) + (-2) \cdot 4}{\sqrt{1^2 + (-4)^2 + 4^2}} = \frac{-15}{\sqrt{33}}.$$

в). Найдем вектор \overline{BC} и вычислим скалярное произведение векторов \overline{AB} и \overline{BC} . $\overline{BC} = \{1; -1; 4\}$.

$$\overline{AB} \cdot \overline{BC} = \{1; 2; -2\} \cdot \{1; -1; 4\} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + (-2) \cdot 4 = -9.$$

Косинус угла φ между векторами \overline{AB} и \overline{BC} определяется равенством

$$\cos \varphi = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{|\overline{AB}| |\overline{BC}|} = \frac{-9}{3 \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 4^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда заключаем, что угол $\varphi = \frac{3}{4}\pi$.

Найдем вектор \overline{AC} и вычислим векторное произведение векторов с помощью формулы

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

$$\overline{AC} = \{2; 1; 2\}. \quad \overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + (-3)\mathbf{k} = \{6; 6; -3\}. \text{ Учитывая, что}$$

модуль векторного произведения – площадь параллелограмма, для площади треугольника имеем соотношение

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{1}{2} |\{6; 6; -3\}| = \frac{1}{2} \sqrt{6^2 + 6^2 + (-3)^2} = \frac{9}{2}.$$

д). Найдем вектор \overline{AD} и вычислим смешанное произведение по формуле

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Имеем } \overline{AD} = \{3; -3; 6\}. \quad (\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 18.$$

Учитывая, что модуль смешанного произведения численно равен объему параллелепипеда, построенного на векторах-сомножителях, а объем пирамиды составляет шестую часть объема параллелепипеда, получаем

$$V_{\text{пир}} = \frac{18}{6} = 3.$$

Пример 4. На плоскости даны вершины треугольника $\triangle ABC$. Найти:

- Канонические уравнения сторон AB и AC ;
- Уравнение высоты, опущенной из вершины B ;
- Внутренний угол $\angle A$;
- Уравнение медианы, проведенной из вершины B ;
- Расстояние от точки B до стороны AC . Сделать чертеж:

$$A(1; 0), \quad B(2; 2), \quad C(3; 1).$$

Решение. а). Уравнения сторон найдем, используя уравнение прямой, проходящей через две заданные точки: $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

$$AB: \frac{y - 0}{2 - 0} = \frac{x - 1}{2 - 1}, \quad y = 2x - 2. \quad AC: \frac{y - 0}{1 - 0} = \frac{x - 1}{3 - 1}, \quad y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}. \text{ Угловой}$$

коэффициент прямой AC равен $k_{AC} = \frac{1}{2}$.

б). Угловой коэффициент высоты BH связан с угловым коэффициентом стороны AC соотношением $k_{AC} \cdot k_{BH} = -1$. Отсюда находим, $k_{BH} = -2$. Уравнение высоты составим, используя уравнение прямой, имеющей заданный наклон и проходящей через заданную точку:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

$$BH: y - 2 = -2(x - 2), \quad y = -2x + 6.$$

в). Для нахождения внутреннего угла $\angle A$ используем формулу

$$\operatorname{tg} \angle A = \frac{k_{AB} - k_{AC}}{1 + k_{AB} \cdot k_{AC}}.$$

$$\text{Получаем, } \operatorname{tg} \angle A = \frac{2 - 1/2}{1 + 2 \cdot 1/2} = \frac{3}{4}. \quad \angle A = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}.$$

г). Чтобы составить уравнение медианы, найдем координаты точки M - середины стороны AC : $x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{1 + 3}{2} = 2, \quad y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2}$.

$$BM: \frac{y - 2}{1/2 - 2} = \frac{x - 2}{2 - 2}, \quad x = 2 \text{ (каноническое уравнение вертикальной прямой)}.$$

д). Расстояние от вершины B до стороны AC найдем по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \text{ где } Ax + By + C = 0 - \text{общее уравнение прямой, } (x_0; y_0) -$$

точка, от которой определяется расстояние. Общее уравнение стороны AC

$$\text{имеет вид: } x - 2y - 1 = 0. \text{ Поэтому } d = \frac{|2 - 2 \cdot 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Строим треугольник в координатных осях:

- б). Угол между ребрами - это угол φ между векторами \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} .

Эти векторы соответственно равны $\overline{AB} = \{2; -2; -1\}$ и $\overline{AC} = \{5; 1; -4\}$. Поэтому

$$\cos \varphi = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| |\overline{AC}|} = \frac{2 \cdot 5 + (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot (-4)}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2} \sqrt{5^2 + 1^2 + (-4)^2}} = \frac{4}{\sqrt{42}}.$$

в). Составим уравнение грани ABC , используя условие компланарности векторов \overline{AB} , \overline{AC} и текущего вектора $\overline{AM} = \{x-1; y-2; z-3\}$:

$$(\overline{AM}, \overline{AB}, \overline{AC}) = \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 5 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим

$$(x-1) \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} - (y-2) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} + (z-3) \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или}$$

$$3x + y + 4z - 17 = 0.$$

г). Угол α между прямой с направляющим вектором \mathbf{a} и плоскостью с нормальным вектором \mathbf{N} определяется формулой

$$\sin \alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{N}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{N}|}.$$

Направляющий вектор ребра равен $\mathbf{a} = \overline{AD} = \{3; -1; 2\}$, координаты нормального вектора плоскости – это коэффициенты в общем уравнении плоскости, т.е. $\mathbf{N} = \{3; 1; 4\}$. Отсюда получаем

$$\sin \alpha = \frac{3 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 4}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} \sqrt{3^2 + 1^2 + 4^2}} = \frac{8}{\sqrt{91}}, \quad \alpha = \arcsin \frac{8}{\sqrt{91}}.$$

д). Направляющим вектором высоты пирамиды, опущенной из вершины D , является нормальный вектор плоскости $\mathbf{N} = \{3; 1; 4\}$. Поэтому канонические уравнения высоты следующие

$$\frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{4}.$$

Проекцию P вершины D на плоскость основания найдем как пересечение прямой DP и плоскости ABC . Для этого от канонических уравнений высоты перейдем к параметрическим уравнениям:

$$\frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{4} = t, \quad x=3t+4, \quad y=t+1, \quad z=4t+5$$

Подставляя последние соотношения в уравнение плоскости ABC , получаем уравнение для определения значения параметра t , соответствующего точке P :

$$3(3t+4)t+1+4(4t+5)-17=0, \quad t=-\frac{8}{13}.$$

Подставляя полученное значение t в параметрические уравнения высоты, находим координаты точки P :

$$x=3\left(-\frac{8}{13}\right)+4=\frac{28}{13}, \quad y=-\frac{8}{13}+1=\frac{5}{13}, \quad z=4\left(-\frac{8}{13}\right)+5=\frac{33}{13}.$$

Пример 6. Найти пределы функций: а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x-1)(4x+1)}{x^2+2x+\sqrt{x}+3}$; б) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x-8}-1}{x^2-81}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{1 - \cos 2x}$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+2} \right)^x$

Решение.

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x-1)(4x+1)}{x^2+2x+\sqrt{x}+3} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$ Чтобы раскрыть неопределенность типа $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$

необходимо и в числителе и в знаменателе в каждом из сомножителей вынести старшие

$$\text{степени} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(3 - \frac{1}{x} \right) x \left(4 + \frac{1}{x} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x^2} + \frac{3}{x^2} \right)} = \frac{(3-0)(4+0)}{(1+0+0+0)} = 12;$$

б)

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x-8}-1}{x^2-81} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(\sqrt{x-8}-1)(\sqrt{x-8}+1)}{(\sqrt{x-8}+1)(x-9)(x+9)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-8-1}{(\sqrt{9-8}+1)(x-9)(x+9)} = \frac{1}{36}$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{1 - \cos 2x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x 2 \sin x \cos x}{2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos 0}{\sin x} = 1;$$

Здесь использован первый замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

г)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+2} \right)^x = (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-3}{3x+2} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-3}{3x+2} \right)^{\frac{3x+2}{-3}} \right]^{\frac{-3}{3x+2} x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-3x}{3x+2}} = \frac{1}{e}$$

Здесь применен второй замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$.

Пример 7. Используя определение, найти производную функции $y = x^2 + 3x$ в точке $x_0 = 1$.

Решение.

$$\text{По определению } y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x}.$$

$$y(x_0) = y(1) = 1^2 + 3 \cdot 1 = 4, \quad y(x_0 + \Delta x) = y(1 + \Delta x) = (1 + \Delta x)^2 + 3(1 + \Delta x) = 4 + 5\Delta x + \Delta x^2$$

Отсюда

$$y'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4 + 5\Delta x + \Delta x^2 - 4}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(5 + \Delta x)}{\Delta x} = 5.$$

Для решения примеров **задания 8** предполагается использование правил дифференцирования и таблицы производных основных элементарных функций:

Правила дифференцирования

1. $c' = 0$, $c - \text{const}$
2. $(ku)' = ku'$, $k - \text{const}$
3. $(u + v)' = u' + v'$ - производная суммы
4. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ - производная произведения

5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ - производная дроби

6. Производная сложной функции:

$$\left[y(u(x))\right]' = y'_u \cdot u'_x$$

(вначале производная внешней функции по промежуточному аргументу)

Таблица производных

$$x' = 1 \quad (1) \quad (u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u' \quad (2)$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} u' \quad (3) \quad \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} u' \quad (4)$$

$$(e^u)' = e^u u' \quad (5) \quad (a^u)' = a^u \ln a u' \quad (6)$$

$$(\ln u)' = \frac{1}{u} u' \quad (7) \quad (\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} u' \quad (8)$$

$$(\sin u)' = \cos u u' \quad (9) \quad (\cos u)' = -\sin u u' \quad (10)$$

$$(tg u)' = \frac{1}{\cos^2 u} u' \quad (11) \quad (ctg u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} u' \quad (12)$$

$$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u' \quad (13) \quad (\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u' \quad (14)$$

$$(arctg u)' = \frac{1}{1+u^2} u' \quad (15) \quad (arcctg u)' = -\frac{1}{1+u^2} u' \quad (16)$$

Особое внимание следует обратить на правило 6 для производных сложных функций. В примере 8в) необходимо вычислить производную **неявной** функции, а в примере 8г) - производную функции, заданной **параметрически**.

(Можно использовать формулу $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$).

